Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
Prof. Dr. A. Filler

Wintersemester 2019/20

Zusammenfassende Notizen zur Vorlesung

Einführung in die Mathematikdidaktik und Didaktik der Geometrie
Teil 5

5 Mathematik als „Welt eigener Art“: Strukturelle Überlegungen anhand magischer Quadrate

5.1 Wodurch kennzeichnet sich „Mathematik als Welt eigener Art“?

Wodurch zeichnet sich die Mathematik „als Welt eigener Art“ aus, d.h. also über ihre unmittelbaren Anwendungen hinaus? Sicherlich ist *„Rechnen“* ein Bestandteil der Mathematik, wobei damit die Beherrschung sinnvoller Rechenverfahren bzw. *Lösungskalküle*, aber auch das Verständnis ihrer „Funktionsweise“ gemeint sind. Mindestens ebenso wie durch „Rechnen“ zeichnet sich die Mathematik durch das Ziehen *deduktiver Schlüsse* aus. Ihr „Gebäude“ lässt sich auf relativ wenigen Grundbegriffen und Grundaussagen aufbauen; alle weiteren Begriffe, Aussagen, Verfahren lassen sich dann exakt definieren bzw. beweisen oder herleiten. Dabei dringt die Mathematik in immer allgemeinere und auch abstraktere Strukturen vor: von den natürlichen zu den komplexen oder zu den hyperrellen Zahlen, von der Ebene oder dem dreidimensionalen Raum zu n- oder sogar unendlichdimensionalen Räumen und Mannigfaltigkeiten. Die Mathematik schafft und verallgemeinert also *Strukturen*. Zusammenfassend seien – sicherlich etwas gewagt hinsichtlich der Reduktion eines derart komplexen Gebildes wie der Mathematik auf wenige Stichworte[1] – drei Bereiche der Mathematik als „Welt eigener Art“ genannt:

- Kalküle / Algorithmen,
- Deduktion,
- Strukturen.

Diese Bereiche stehen natürlich in vielfältigen Beziehungen zueinander und lassen sich kaum voneinander trennen. Dennoch wird in den folgenden Überlegungen vor allem auf die Aspekte *Kalküle* und *Strukturen* eingegangen und das Ziehen deduktiver Schlüsse lediglich am Rande betrachtet.[2] Gerade im Mathematikunterricht und in der Erkenntnisgeschichte der Mathematik sind zudem auch „induktive“ Vorgehensweisen (vom Speziellen zum Allgemeinen, vom Konkreten zum Abstrakten) von Bedeutung – eine Vorgehensweise, die sich im Folgenden widerspiegeln wird.

Neben den Bereichen *Kalküle* und *Strukturen* und ihren Beziehungen zueinander wird in den folgenden Überlegungen der Bezug zu *Veranschaulichungen* eine zentrale Bedeutung einnehmen. Zwar lassen sich gerade abstraktere mathematische Strukturen oft nicht mehr unmittelbar „verbildlichen“, jedoch haben (teilweise nur gedanklich entstehende) Visualisierungen eine hohe Bedeutung beim Lernen von Mathematik und auch bei der Herausbildung neuer mathematischer Erkenntnisse bzw. beim Lösen mathematischer Probleme.[3] Gerade bei der Herausbildung eines grundlegenden Verständnisses mathematischer Strukturen sind anschauliche Vorstellungen bedeutsam.

Algebraische Kalküle wie das Umformen von Gleichungen und das Lösen linearer Gleichungssysteme sind feste Bestandteile des Mathematikunterrichts der Sekundarstufen I und II. Allzu häufig wird der Unterricht durch ein recht schematisches Abarbeiten derartiger Kalküle dominiert. Visualisierungen und die verstärkte Einbeziehung graphischer Lösungsverfahren können ein anschauliches Verständnis von Lösungskalkülen sowie intuitive strukturelle Vorstellungen von Lösungsmengen

[1] Auch *Modelle*, wie z. B. Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die keine unmittelbaren Anwendungsbezüge aufweisen müssen, kennzeichnen die Mathematik. Im weiten Sinne lassen sich derartige Modelle aber auch unter „Strukturen“ subsumieren. Des Weiteren ist die Mathematik als „Welt eigener Art“ auch durch die ihr eigene *Sprache und Symbolik* gekennzeichnet; dieser Aspekt zieht sich durch alle hier genannten Bereiche und liegt gewissermaßen „quer“ dazu.

[2] Siehe hierzu das Kapitel „Beweisen und Argumentieren“ der Vorlesung „Didaktik der Elementargeometrie“.

[3] Siehe hierzu auch das folgende Kapitel der Vorlesung zum Problemlösen.

unterstützen. Dies soll exemplarisch am Beispiel linearer Gleichungen und vor allem Gleichungssysteme herausgearbeitet werden.[4]

5.2 Algebraische Strukturen in der Schule?

Gegenstände der Algebra und speziell der Linearen Algebra sind Lösungskalküle und (algebraische) Strukturen. Der Zusammenhang von Linearer Algebra und Analytischer Geometrie führt in natürlicher Weise zu Visualisierungsmöglichkeiten gewisser algebraischer Strukturen (insbesondere linearer und affiner Teilräume von Vektor- bzw. affinen Punkträumen niedriger Dimension). Schließlich sind als weiterer Aspekt der (linearen) Algebra in der Schule Anwendungen bzw. Modellbildungen zu nennen. In dem vorliegenden Beitrag wird vorrangig auf den Zusammenhang struktureller Überlegungen mit Visualisierungen eingegangen.

In den Sechziger und Siebziger Jahren des 20. Jahrhunderts sollten algebraische Strukturen im Zuge der „Neuen Mathematik“ explizit im Mathematikunterricht behandelt werden (siehe Abb. 1). Das Scheitern dieses Vorhabens liegt mittlerweile mehrere Jahrzehnte zurück; dazu dürfte wohl wesentlich ein überfrachtetes „formales Begriffs- und Regelsystem“ (BRÜNING/SPALLEK 1978, S. 236) sowie die Arbeit mit abstrakten Objekten bzw. Strukturen beigetragen haben, für die Schüler nicht genügend viele konkret „fassbare“ Beispiele kannten und von denen sie daher keine Vorstellungen aufbauen konnten.

INHALT

32 *A. Erklärungen*

Erklärung 4.2. Eine Menge G heißt eine *Gruppe*, wenn für ihre Elemente eine Verknüpfung (Zeichen: $\circ$) so definiert ist, daß die folgenden Postulate erfüllt sind:

$\mathfrak{G}_1$: Sind s und t zwei (gleiche oder verschiedene) Elemente von G, so ist auch $s \circ t$ ein Element von G.

$\mathfrak{G}_2$: Die Verknüpfung ist assoziativ: $s \circ (t \circ u) = (s \circ t) \circ u$.

$\mathfrak{G}_3$: Es gibt ein „Einselement“ e, für das $s \circ e = e \circ s = s$ gilt für alle $s \in G$.

$\mathfrak{G}_4$: Zu jedem Element $s \in G$ gibt es ein Element $s^{-1} \in G$, das der Gleichung $s^{-1} \circ s = s \circ s^{-1} = e$ genügt.

Man kann diese Erklärung auch so fassen, daß man mit drei Postulaten auskommt. Wenn man im ersten Satz eine *innere* Verknüpfung fordert, wird $\mathfrak{G}_1$ überflüssig.

Beispiele für Gruppen:

(A) Die Menge $\mathbb{Q}^+$ der *positiven* rationalen Zahlen mit der Multiplikation als Verknüpfung. Das Einselement ist die Zahl 1.

(B) Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen mit der *Addition* als Verknüpfung. Hier ist die Zahl 0 das „Einselement“, denn es ist ja $a + 0 = 0 + a = a$.

(C) Für die endliche Menge

$$M = \{e, a, b, c\}$$

wird eine Verknüpfung $\circ$ durch die folgende „Gruppentabelle“ definiert:

(5)

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

Abb. 1: Inhaltsverzeichnis und Auszug aus einem Duden-Übungsbuch für Schüler: MESCHKOWSKI, H.; ARENDT, J.; LESSNER, G.; WURL, B.: *Aufgaben zur modernen Schulmathematik mit Lösungen* I (*bis 10. Schuljahr*). Bibliographisches Institut / Dudenverlag, Mannheim, 1970.

[4] Anwendungsaspekte werden hier nur am Rande betrachtet; sie waren bereits Gegenstand von Kapitel 3 der Vorlesung. Im Folgenden stehen innermathematische Aspekte der Thematik im Mittelpunkt der Überlegungen.

5.3 Magische Quadrate von der Grundschule bis zum Studium

Ein Beispiel für mathematische „Strukturen“, die auf höchst unterschiedlichen Niveau- und Abstraktionsstufen betrachtet werde können, bilden die magischen Quadrate.

Unter einem *magischen Quadrat* der Kantenlänge n versteht man (im engsten Sinne) eine quadratische Anordnung der Zahlen $1, 2, \ldots, n^2$, bei der die Summen der Zahlen aller Zeilen, Spalten und der beiden Diagonalen gleich sind. Das älteste bekannte magische Quadrat stammt aus China (3. Jahrtausend v. Chr.); es hat die Kantenlänge 3 und ist durch folgende Matrix gegeben:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Das wahrscheinlich bekannteste magische Quadrat hat die Kantenlänge 4 und ist in Albrecht Dürers Kupferstich Melencolia I (von 1514, man achte auf die beiden mittleren Zahlen in der unteren Reihe) dargestellt:

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}.$$

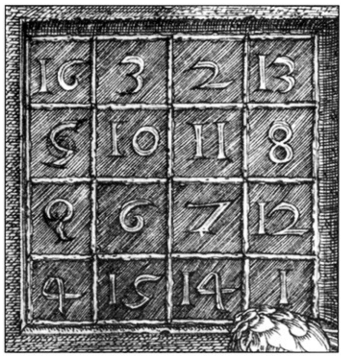

Abb. 22: Albrecht Dürers Kupferstich Melencolia I mit vergrößertem Ausschnitt des enthaltenen magischen Quadrats

Magische Quadrate lassen sich bereits in der Grundschule einsetzen, um Zahlenmuster und -gesetzmäßigkeiten zu untersuchen siehe u. a. Koth (2005). Kinder können beispielsweise unvollständige magische Quadrate vervollständigen sowie Zeilen-, Spalten- und Diagonalensummen s (im Folgenden nur noch kurz als Zeilensummen bezeichnet) in magischen Quadraten ermitteln. Lässt man die Bedingung fallen, dass ein magisches Quadrat genau die Zahlen $1, 2, \ldots, n^2$ enthalten muss, so können magische Quadrate beliebiger Zeilensummen konstruiert werden. Die folgenden Aufgaben eignen sich gut als „Knobelaufgaben“, z. B. zu Beginn der Sekundarstufe I:

1. Finde ein magisches Quadrat mit der Seitenlänge 4 und $s = 38$.
2. Finde ein magisches Quadrat mit der Seitenlänge 4 und $s = 35$.

Hierbei können Schülerinnen und Schüler erkennen, dass es sinnvoll sein kann, magische Quadrate zu „addieren“ (siehe Übung).

Die folgende Aufgabe motiviert zusätzlich die Vervielfachung magischer Quadrate:

3. Finde ein magisches Quadrat mit der Seitenlänge 4 und $s = 37$.

Hierfür liegt es nun nahe, ein Quadrat mit $s = 1$ dreifach zu dem Dürer-Quadrat zu addieren.

Schüler gelangen anhand dieser Aufgaben zu zwei Erkenntnissen:

- Die Summe zweier magischer Quadrate ist wiederum ein magisches Quadrat.
- Das Produkt eines magischen Quadrats mit einer (zunächst natürlichen) Zahl ist ebenfalls ein magisches Quadrat.

Wesentlich schwieriger als die bisher gestellten ist die folgende Aufgabe:

4. Finde ein magisches Quadrat mit der Seitenlänge 3 und $s = 16$.

Hierfür erscheint es naheliegend, z. B. von dem bekannten chinesischen 3×3-Quadrat (siehe S. 3) mit $s = 15$, auszugehen und ein magisches Quadrat mit $s = 1$ hinzu zu addieren. Um ein magisches 3×3-Quadrat der Zeilensumme 1 zu erhalten, muss aber die *Bedingung aufgegeben werden, dass nur natürliche Zahlen als Elemente auftreten*. Von einer Lösung der Aufgabe 4 ist es daher nur noch ein recht kleiner Schritt dahin, magische Quadrate zu betrachten, die aus beliebigen reellen Zahlen bestehen. Es lässt sich dann herausarbeiten, dass die Menge aller magischen Quadrate mit einer vorgegebenen Kantenlänge n einen Vektorraum bildet.[5]

Magische Quadrate lassen sich auch als Lösungsmengen homogener linearer Gleichungssysteme betrachten. Die Bedingung, dass die Summen aller Zeilen, aller Spalten und der beiden Diagonalen gleich sein müssen, führt bei magischen Quadraten der Kantenlänge 3, die sich allgemein in der Form $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ schreiben lassen, zu folgendem LGS mit 8 Gleichungen und den Variablen $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ und s (der Summe jeder der Zeilen, Spalten und Diagonalen):

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
a_{11} & + & a_{12} & + & a_{13} & & & & & & & & & & & - & s & = & 0 \\
 & & & & & & a_{21} & + & a_{22} & + & a_{23} & & & & & - & s & = & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & a_{31} & + & a_{32} + a_{33} & - & s & = & 0 \\
a_{11} & & & & & + & a_{21} & & & & & + & a_{31} & & & - & s & = & 0 \\
 & & a_{12} & & & & & + & a_{22} & & & & & + & a_{32} & - & s & = & 0 \\
 & & & & a_{13} & & & & & + & a_{23} & & & & + a_{33} & - & s & = & 0 \\
a_{11} & & & & & & & + & a_{22} & & & & & & + a_{33} & - & s & = & 0 \\
 & & & & a_{13} & & & + & a_{22} & & & + & a_{31} & & & - & s & = & 0
\end{array}$$

Man erhält (bevorzugt mithilfe des Computers) als Lösungsmenge dieses LGS

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} ;\ \lambda_1, \lambda_2, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Mithilfe dieser Darstellung lassen sich leicht magische Quadrate mit frei wählbarer Zeilen-, Spalten- und Diagonalensumme s aus den „Basisquadraten“ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ konstruieren.

Zitierte Literatur

- FILLER, A. (2011): *Elementare Lineare Algebra*. Spektrum, Heidelberg.
- KOTH, M. (2005): *Spielereien mit Zahlen und Ziffern. Denkspielspaß für Kinder von 9 bis 99*. Aulis Verlag Deubner, Köln.

[5] Siehe u. a. Filler (2011).